3.3 Çözümlü Problemler

(1) "$\varepsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$; (b) $f(x) = x^3$; (c) $f(x) = \cos(3x + 2)$.

Çözüm: (a) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası verilsin.$x \in \mathbb{R}$ için $\mid x - x_0 \mid < \delta < 1$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
\mid f(x) - f(x_0) \mid =& \mid 3(x^2 - {x_0}^2) - 2(x - x_0) \mid \\
&\leq (3 \mid x + x_0 \mid +2) \mid x - x_0 \mid \\
&\mid \big[|x - x_0| < 1 \Longrightarrow \mid x + x_0 \mid \\
&\leq \mid x \mid + \mid x_0 \mid \leq \mid x - x_0 \mid +2 \mid x_0 \mid < 1 + 2 \mid x_0 \mid \big] \\
&\leq (5 + 6 \mid x_0 \mid) \mid x - x_0 \mid \\
&\leq (5 + 6 \mid x_0 \mid)\delta
\end{aligned}
$$

dır. $(5 + 6 \mid x_0 \mid)\delta < \varepsilon$ dan $\delta < \frac{\varepsilon}{5+6|x_0|}$ bulunur. Burada, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5+6|x_0|}\}$ seçimi yapıldığında $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\mid x - x_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon$ olduğu, yani $3x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğu anlaşılır.$x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğuna göre bu fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir.

(b) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. $x \in \mathbb{R}$ için $\mid x - x_0 \mid < \delta$ olduğunda,

$$
\begin{aligned}
\mid x^3 - {x_0}^3 \mid &= \mid x^2 + xx_0 + {x_0}^2 \mid\mid x - x_0 \mid \\
&\leq (\mid x \mid^2 + \mid x \mid\mid x_0 \mid + \mid x_0 \mid^2) \mid x - x_0 \mid \\
&\quad [\mid x - x_0 \mid < 1 \Longrightarrow \mid x \mid < 1 + \mid x_0 \mid] \\
&\leq (1 + 3 \mid x_0 \mid +2 \mid x_0 \mid^2) \mid x - x_0 \mid \\
&< (1 + 3 \mid x_0 \mid +2 \mid x_0 \mid^2)\delta
\end{aligned}
$$

dır. $(1 + 3 \mid x_0 \mid +2 \mid x_0 \mid^2)\delta < \varepsilon$ dan $\delta < \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+2|x_0|^2}$ bulunur. Burada, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+2|x_0|^2}\}$ seçimi yapıldığında $\forall x \in \mathbb{R}$

için $\mid x - x_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid x^3 - {x_0}^3 \mid < \varepsilon$ olduğu, yani x^3 fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğu anlaşılır.$x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğuna göre, bu fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir.
(c) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası verilsin.$x \in \mathbb{R}$ için $\mid x - x_0 \mid < \delta$ olduğunda

$$\begin{aligned}
\mid \cos(3x+2) - \cos(3x_0+2) \mid &= \mid -2 \sin \frac{3(x-x_0)}{2} \sin \frac{3(x+x_0+4)}{2} \mid \\
&\quad [\mid \sin \frac{3(x+x_0+4)}{2} \mid \leq 1 \\
&\quad \text{ve} \mid \sin \frac{3(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{2} \mid \leq \frac{3}{2} \mid \mathrm{x} - \mathrm{x}_0 \mid] \\
&\leq 2\frac{3}{2} \mid x - x_0 \mid = 3 \mid x - x_0 \mid < 3\delta
\end{aligned}$$

dır. $3\delta < \varepsilon$ dan $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur. Burada, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ seçimi yapıldığında $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\mid x - x_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid \cos(3x+2) - \cos(3x_0+2) \mid < \varepsilon$ olduğu, yani $\cos(3x+2)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğu anlaşılır.$x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğuna göre, bu fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir. $\diamond$

(2) $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı ve süreklilik kümesi $S(f) = \{-1, 1\}$ olan bir f fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \quad \text{ise,} \\ x^2 - 1, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu -1 ve 1 noktalarında sürekli olup $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$ noktasında ikinci çeşit süreksizliğe sahiptir. Gerçekten, $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x'_n \in \mathbb{Q}$ ve $x''_n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = \lim\limits_{n \to \infty} x''_n = a$ koşullarını sağlayan (x'_n) ve (x''_n) dizileri için

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = 0 \neq a^2 - 1 = \lim_{n \to \infty} f(x''_n)$$

olduğuna göre, fonksiyon $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$ noktasında süreksizdir.
$a = 1$(veya $a = -1$) için $x_n \in \mathbb{R}$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$ (veya $= -1$) koşullarını

sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$$

olduğuna göre, $S(f) = \{-1, 1\}$ dir. $\diamond$

(3) $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı ve süreklilik kümesi $S(f) = \mathbb{Z}$ olan bir f fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \quad \text{ise}, \\ \sin \pi x, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \quad \text{ise}. \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu için $S(f) = \mathbb{Z}$ olduğunu gösterelim.$\forall a \in \mathbb{Z}$ için $x_n \in \mathbb{R}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0) \Longrightarrow f, a \in \mathbb{Z} \text{ noktasında süreklidir}$$

$\forall a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x'_n \in \mathbb{Q}$, $x''_n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$ koşullarını sağlayan (x'_n) ve (x''_n) dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 0 \neq \sin \pi a = \lim_{n\to\infty} f(x''_n)$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti yoktur. Buna göre, fonksiyon $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ nin tamamında süreksizdir. $\diamond$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \in \mathbb{Q} \quad \text{ise}, \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun $S(f)$ süreklilik kümesini bulunuz.

Çözüm: $\forall a \in \mathbb{R}$,$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x'_n \in \mathbb{Q}$, $x''_n \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$ koşullarını sağlayan (x'_n) ve (x''_n) dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} (3x'_n - 2) = 3a - 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} (x''_n)^2 = a^2$$

bulunur. Buna göre, f nin a da sürekli olması için $a^2 = 3a - 2$, yani $a = 1$ ve $a = 2$ olmalıdır. Dolayısıyla, $S(f) = \{1, 2\}$ dir. $\diamond$

(5) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının süreklilik durumunu inceleyiniz. Süreksiz oldukları durumlarda süreksizlik çeşidini belirtiniz.

(a) $f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] + [\![-x]\!], & x \notin \mathbb{Z} \quad \text{ise,} \\ -1, & x \in \mathbb{Z} \quad \text{ise;} \end{cases}$

(c) $f(x) = x^2 + \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$;

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \quad \text{ise,} \\ 2, & x = 0 \quad \text{ise;} \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \text{ ise,} \\ 4, & \text{x=1} \quad \text{ise;} \end{cases}$

(f) $f(x) = x [\![x]\!]$;

(g) $f(x) = \begin{cases} x [\![\frac{1}{x}]\!], & x \neq 0 \quad \text{ise,} \\ 1, & x = 0 \quad \text{ise;} \end{cases}$

(h) $f(x) = [\![x]\!] \sin \pi x$;

(i) $f(x) = [\![x]\!] ([\![x]\!] - (-1)^{[\![x]\!]} \cos \pi x)$;

(j) $f(x) = (-1)^{[\![x]\!]}$;

(k) $f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \quad \text{ise,} \\ 1, & x = 0 \quad \text{ise;} \end{cases}$

(l) $f(x) = \dfrac{|\, x \,|}{\arctan x}$;

(m) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |\, x \,| \leq 1 \quad \text{ise,} \\ |\, x - 1 \,|, & |\, x \,| > 1 \quad \text{ise;} \end{cases}$

(n) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{4} \text{ ise,}\\ 1, & x=\frac{\pi}{4} \text{ ise,}\\ x^2-\frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4}<x\le\pi \text{ ise;}\end{cases}$

(o) $f(x)=\log(x-1)^2$.

Çözüm: (a) $n\le x<n+1, n\in\mathbb{Z}$ ise $[\![x]\!]=n$ olduğuna göre, $I_n=[n,n+1), n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\mid_{I_n})(x)=\sqrt{x-n}$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $f(n)=0$, $f(n^-)=\lim\limits_{x\to n^-}\sqrt{x-n+1}=1$, $f(n^+)=\lim\limits_{x\to n^+}\sqrt{x-n}=0$ ve $f(n^-)=1\neq f(n)=f(n^+)$ olduğuna göre, $S(f)=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ dir. $x=n\in\mathbb{Z}$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(b) $n<x<n+1, n\in\mathbb{Z}$ ise $[\![x]\!]=n$ ve $[\![-x]\!]=-n-1$ olduğuna göre, $I_n=(n,n+1), n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\mid_{I_n})(x)=-1$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $f(n)=0$, $f(n^-)=\lim\limits_{x\to n^-}([\![x]\!]-[\![-x]\!])=n-1+(-n)=-1$, $f(n^+)=\lim\limits_{x\to n^+}([\![x]\!]+[\![-x]\!])=n+(-n-1)=-1$ ve $f(n^-)=-1\neq f(n)\neq -1=f(n^+)$ olduğuna göre, $S(f)=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ dir. $x=n\in\mathbb{Z}$ noktaları fonksiyonun kaldırılabilir süreksizlik noktalarıdır.

(c) $f(\pm 1)=0$ olduğu açıktır. $\mid x\mid>1$ için $f(x)=x^2+1\Longrightarrow f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$,

$$f(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}(x^2+1)=2,$$

ve $\mid x\mid<1$ için $f(x)=x^2-1\Longrightarrow f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$,

$$f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}(x^2-1)=0$$

bulunur. $f(-1^-)=2\neq 0=f(-1)=f(-1^+)$ ve $f(1^-)=0=f(0)\neq f(1^+)$ olduğuna göre, $S(f)=\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ dir. $x=\pm 1$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(d) $2\sin x, \mid x\mid\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ve $x\neq 0$ için $\mid x\mid\neq 0$ olduğuna göre, $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır.

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x}{-x}=-2, f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x}{x}=2$$

olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ dır. $x = 0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.
(e) $x^3 - 1,\ x^2 - 1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ve $x \neq 1$ için $x^2 - 1 \neq 0$ olduğuna göre, $\frac{x^3-1}{x^2-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{1\})$ dir. $\forall x \neq 1$ için $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ olduğuna göre

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2},\ f(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

bulunur. $f(1^-) = f(1^+) = \frac{3}{2} \neq 4 = f(1)$ olduğuna göre $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ dir. $x = 1$ noktası fonksiyonun kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.
(f) $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $[\![x]\!] = n$ ve $I_n = [n, n+1), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\ |_{I_n})(x) = nx$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n^2$, $f(n^-) = \lim\limits_{x\to n^-}(n-1)x = (n-1)n$, $f(n^+) = \lim\limits_{x\to n^+} nx = n^2$ ve $f(n^-) = (n-1)n \neq n^2 = f(n) = f(n^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$dir. $x = n \in \mathbb{Z}$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.
(g) $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için $I_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ olmak üzere $(f\ |_{I_n})(x) = nx$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için $f(\frac{1}{n}) = 1, f(\frac{1}{n}^+) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+} x\,[\![\frac{1}{x}]\!] = \frac{n-1}{n}$ bulunur. $f(\frac{1}{n}) \neq f(\frac{1}{n}+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dir. $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

Şimdi fonksiyonun $x = 0$ noktasında süreklilik durumunu inceliyelim. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ için

$$\frac{n}{n+1} < x\,[\![\frac{1}{x}]\!] < \frac{n+1}{n} \tag{3.5}$$

olduğu açıktır. $n \to \infty \Longrightarrow x \to 0+$ iken [(3.5)ten dolayı]

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x\,[\![\frac{1}{x}]\!] = 1.\ [\![\frac{1}{x}]\!] = -n, n \in \mathbb{N}\ \text{ ise}$$

$$-n \leq \frac{1}{x} < -n+1, -\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{-n}$$

ve dolayısıyla,

$$\frac{-n}{-n+1} < x\,[\![\frac{1}{x}]\!] < \frac{-n+1}{-n} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) dan dolayı,

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} x \llbracket \frac{1}{x} \rrbracket = 1$$

bulunur. Buna göre, $f(0^-) = f(0) = f(0^+) = 1$ eşitliklerinden fonksiyonun $x = 0$ da sürekli olduğu anlaşılır.
(h) $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $\llbracket x \rrbracket = n$ olduğuna göre, $I_n = [n, n+1), n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(f \mid_{I_n})(x) = n \sin \pi x$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n \sin \pi n = 0$, $f(n^-) = \lim_{x\to n^-}(n-1)\sin \pi x = (n-1)\sin \pi n = 0$, $f(n^+) = \lim_{x\to n^+} n \sin \pi x = n \sin n\pi = 0$ bulunur. $f(n^-) = f(n) = f(n^+) = 0$ olduğuna göre, fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir.
(i) $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $\llbracket x \rrbracket = n$ olduğuna göre, $I_n = [n, n+1), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f \mid_{I_n})(x) = n(n - (-1)^n \cos \pi x)$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}
f(n) &= n(n - (-1)^n \cos \pi n) = n(n - (-1)^n(-1)^n) = n(n-1), \\
f(n^-) &= \lim_{x\to n^-}(n-1)(n-1-(-1)^{n-1}\cos \pi x) = \\
&= (n-1)(n-1-(-1)^{n-1}(-1)^n = (n-1)n, \\
f(n^+) &= \lim_{x\to n^+} n(n - (-1)^n \cos \pi x) = n(n-1)
\end{aligned}$$

bulunur. $f(n^-) = f(n) = f(n^+)$ olduğuna göre, fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir.
(j) $2n \leq x < 2n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $(-1)^{[|x|]} = 1$ olduğuna göre, fonksiyon $I_n = [2n, 2n+1), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f \mid_{I_n})(x) = 1$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. Benzer şekilde $J_n = [2n-1, 2n), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f \mid_{J_n})(x) = -1$ fonksiyonu J_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$f(2n) = 1, \quad f(2n-1) = -1 \quad f(2n^-) = \lim_{x\to 2n^-}(-1)^{2n-1} = -1,$$

$$f(2n^+) = \lim_{x\to 2n^+}(-1)^{2n} = 1 \; f((2n-1)^-) = \lim_{x\to (2n-1)^-}(-1)^{2n-2} = 1,$$

$$f((2n-1)^+) = \lim_{x\to(2n-1)^+}(-1)^{2n-1} = -1$$

bulunur. $f(2n^-) = -1 \neq 1 = f(2n) = f(2n^+)$ ve $f((2n-1)^-) = 1 \neq -1 = f(2n-1) = f((2n-1)^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ dir. $x = n \in \mathbb{Z}$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.
(k) Terimleri $x'_n = \frac{1}{n\pi}, x''_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ biçiminde tanımlı (x'_n)ve(x$''$n) dizilerini gözönüne alalım. $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limiti yoktur.$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $x = 0$ noktası ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır.
(l) $\mid x \mid$, $\arctan x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ve $x \neq 0$ için $\arctan x \neq 0$ olduğuna göre, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır. $x \to 0$ iken $\arctan x \sim x$ olduğundan dolayı

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mid x \mid}{\arctan x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\arctan x} = -1 \ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mid x \mid}{\arctan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\arctan x} = 1$$

bulunur. Buna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $x = 0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.
(m) $f \in \mathcal{C}([-1,1] \bigcup (-\infty,-1) \bigcup (1,+\infty))$ olduğu açıktır. $f(1) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$, $f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$, $f(-1) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(-1^-) = \lim\limits_{x\to -1^-} (1-x) = 2$, $f(-1^+) = \lim\limits_{x\to -1^+} \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$, bulunur. $f(-1^-) = 2 \neq 0 = f(-1) = f(-1^+)$ ve $f(1^-) = 0 = f(1) = f(1^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dir. $x = -1$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.
(n) $f \in \mathcal{C}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}] \bigcup (\frac{\pi}{4}, \pi))$ olduğu açıktır. $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}^-) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(\frac{\pi}{4}^+) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} (x^2 - \frac{\pi^2}{16}) = 0$ ve $f(\frac{\pi}{4}^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 = f(\frac{\pi}{4}) \neq f(\frac{\pi}{4}^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \{\frac{\pi}{4}\}$ dir. $x = \frac{\pi}{4}$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.
(o) $(x-1)^2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ve $\ln u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ olduğuna göre, $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{1\})$ dir. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \log(x-1)^2 = -\infty$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ dir. $x = 1$ noktası fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır. $\diamond$

(6) Aşağıdaki eşitlikler ile tanımlanan fonksiyonlar $\mathbb{R}$ nin hangi nokta-

larında süreksizdir? Süreksizlik çeşidini belirleyiniz.

$(a) \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$; $\qquad (b) f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise}; \end{cases}$

$(c) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \text{ ise}, \\ 1, & x = 0 \text{ ise}, \\ 1 + \tan x, & x > 0 \text{ ise}; \end{cases} \qquad (d) \quad f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$;

$(e) \quad f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$; $\qquad (f) \quad f(x) = \sin x \sin\frac{1}{x}$;

$(g) \quad f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sin 2x}$; $\qquad (h) \quad f(x) = \dfrac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x^3 - x^2}$;

$(i) \quad f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}$; $\qquad (j) \quad f(x) = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

Çözüm: (a) Pay ve payda $\mathbb{R}$ de sürekli ve $\forall x \neq \pm 3$ için $x^2 - 9 \neq 0$ olduğuna göre, $f \in C(\mathbb{R} \backslash \{-3, 3\})$ dir. $f(-3^-) = +\infty$, $f(-3^+) = -\infty$, $f(3^-) = -\infty$, $f(3^+) = +\infty$ olduğuna göre, fonksiyon $x = \pm 3$ noktasında bir sonsuz süreksizliğe sahiptir.

(b) $\dfrac{\pi}{x} \in C(\mathbb{R} \backslash \{0\})$ ve $\sin y \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ olduğuna göre, $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \backslash \{0\})$ dır. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi}{x}$ limitinin mevcut olmadığını biliyoruz. Dolayısıyla, $x = 0$ noktası fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(c) $x^2 \in C((-\infty, 0))$ ve $\tan x \in C(\mathbb{R}_+ \backslash \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n = 0, 1, 2, \ldots\})$ olduğuna göre, $f(x) \in C((-\infty, 0)) \cup (\mathbb{R}_+ \backslash \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n = 0, 1, 2, \ldots\})$ dır. $f(0) = 1$, $f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0$, $\quad f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \tan x) = 1$ bulunur. $f(0^-) = 0 \neq 1 = f(0) = f(0^+)$ olduğuna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır. $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$f((\tfrac{\pi}{2} + n\pi)^-) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + n\pi)^-} (1 + \tan x) = +\infty$$

$$f((\tfrac{\pi}{2} + n\pi)^+) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + n\pi)^+} (1 + \tan x) = -\infty$$

olduğuna göre, $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\; n = 0, 1, 2, \ldots$ noktaları fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(d) $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{1\})$ olduğu açıktır.

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{x-1} = -1,$$

$$f(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

ve $f(1^-) \neq f(1^+)$ olduğuna göre, $x = 1$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(e) $x^3 - 3x^2 - 4x \in C(\mathbb{R})$ ve $x \notin \{-1, 0, 4\}$ için $x^3 - 3x^2 - 4x \neq 0$ olacağından, $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 4\})$ dır. $x \notin \{-1, 0, 4\}$ için

$$f(x) = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{20(x-4)} + \frac{1}{5(x+1)}$$

olduğu açıktır. $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{1}{x}$ ve $\dfrac{1}{x-4}$ Fonksiyonları sırasıyla $x = -1$, $x = 0$ ve $x = 4$ noktalarında, dolayısıyla, $f(x)$ fonksiyonu -1, 0 ve 4 noktalarında ikinci çeşit süreksizliğe sahiptir.

(f) $\sin x \in C(\mathbb{R})$ ve $\sin \frac{1}{x} \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ olduğuna göre, $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dir. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$|f(x)| = |\sin x||\sin \tfrac{1}{x}| \leq |\sin x| \leq |x|$$

olduğuna göre $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ bulunur. Buna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(0) = 0$ tanımıyla $f \in C(\mathbb{R})$ olur.

(g) $\arcsin x \in C([-1, 1])$, $\sin 2x \in C(\mathbb{R})$ ve $\forall x \in [-1, 1]\backslash\{0\}$ için $\sin 2x \neq 0$ olduğuna göre, $f \in [-1, 1]\backslash\{0\}$ olur. $x \to 0$ iken $\arcsin x \sim x$ ve $\sin 2x \sim 2x$ olduğuna göre,

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

ve benzer şekilde $f(0^+) = \dfrac{1}{2}$ dir. $f(0^-) = f(0^+)$ olduğuna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(0) = \dfrac{1}{2}$

tanımıyla $f \in C(\mathbb{R})$ olur.
(h) $\cos(\frac{x\pi}{2}) \in C(\mathbb{R}),\ x^3 - x^2 \in C(\mathbb{R})$ ve $x \neq 0,\ x \neq 1$ için $x^3 - x^2 \neq 0$ olduğuna göre, $f(x) \in C(\mathbb{R}\backslash\{0,1\})$ dir. $f(0^-) = f(0^+) = -\infty$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{x\pi}{2})}{x^2(x-1)} &= \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(x-1))}{x-1} \\
& \lim_{x\to 1} \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))}{x-1} \\
& [x \to 1 \text{ iken } \sin\tfrac{\pi}{2}(x-1) \sim \frac{\pi}{2}(x-1)] \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}(x-1)}{x-1} = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik ve $x = 1$ noktası da fonksiyonun bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(1) = -\dfrac{\pi}{2}$ tanımıyla fonksiyon $x = 1$'de süreklidir.
(i) $\dfrac{1}{x},\ 3^{\frac{1}{x}},\ 2^{\frac{1}{x}} \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ olduğuna göre, $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır.

$$\begin{aligned}
f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}} + 1}{(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}} - 1}\ [x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow (\tfrac{3}{2})^{\frac{1}{x}} = 0] = -1 \\
f(0^+) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1 + (\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}}}{1 - (\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}}}\ [x \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow (\tfrac{2}{3})^{\frac{1}{x}} \to 0] = 1
\end{aligned}$$

bulunur. $f(0^-) \neq f(0^+)$ olduğuna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.
(j) $\dfrac{1}{x} \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ve $\ln\dfrac{1+x}{1-x} \in C((-1,1))$ olduğuna göre, $f \in C((-1,1)\backslash\{0\})$ dır.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln\big(\frac{1+x}{1-x}\big)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} \ln(1 + \frac{2x}{1-x})^{\frac{1}{x}} \\
= \ln[\lim_{x\to 0}(1 + \frac{2x}{1-x})^{\frac{1}{x}}] &= \ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}} \\
= \ln e^2 = 2 &
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $x = 0$ noktası fonksiyonun bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(0) = 2$ tanımıyla $f \in C((-1,1))$ olur. $\diamond$

(7) Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olması için a ne olmalıdır?

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3}, & x \neq -3 \text{ ise}, \\ a, & x = -3 \text{ ise}; \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} (\pi + 2x)\tan x, & x \in (-\pi, \frac{\pi}{2}) \setminus \{-\frac{\pi}{2}\} \text{ ise}, \\ a, & x = -\frac{\pi}{2} \text{ ise}; \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ a, & x = 0 \text{ ise}; \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ a, & x = 0 \text{ ise}; \end{cases}$ (e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+2x)}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ a, & x = 0 \text{ ise}. \end{cases}$

Çözüm: (a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} (x-3) = -6$ olduğuna göre, fonksiyonun -3 noktasında sürekli olması, yani $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$ olması için $a = -6$ olmalıdır.

(b) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} (\pi + 2x)\tan x [\pi + 2x = y \Rightarrow x \to -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow y \to 0] = \lim\limits_{y \to 0} y \tan(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{y \to 0} y \cot \frac{y}{2} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{y}{\sin \frac{y}{2}} \cos \frac{y}{2} = 2$ olduğuna göre, fonksiyonun $x = -\frac{\pi}{2}$ noktasında sürekli olması için $a = 2$ olmalıdır.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{x} = \frac{1}{2} [\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x}] = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ olduğuna göre, fonksiyonun $x = 0$ noktasında sürekli olması için $a = 1$ olmalıdır.

(d) $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} [\frac{1}{x^2} = y \Rightarrow x \to 0 \Leftrightarrow y \to +\infty] = \frac{1}{\lim\limits_{y \to +\infty} e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$ olduğuna göre, fonksiyonun $x = 0$ noktasında sürekli olması için $a = 0$ olmalıdır.

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2 \ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}} [y = (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \Rightarrow x \to 0 \Leftrightarrow y \to e] = \frac{1}{2} \frac{1}{\lim\limits_{y \to e} \ln y} = \dfrac{1}{2 \ln e} = \frac{1}{2}$ olduğuna göre, fonksiyonun $x = 0$ noktasında sürekli olması için $a = \frac{1}{2}$ olmalıdır. $\diamond$

(8) Aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

(a) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & x\leq 0 \quad \text{ise},\\ ax+b, & 0<x<1 \text{ ise},\\ \sqrt{x}, & x\geq 1 \quad \text{ise};\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}(x^2)^a\sin^b(x^2), & x\neq 0 \text{ ise},\\ 0, & x=0 \text{ ise}.\end{cases}$

Çözüm: (a)

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-}(x-1)^3=-1, \quad f(0)=(0-1)^3=-1,\\ f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b, \quad f(1)=\sqrt{1}=1,\\ f(1^-) &= \lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b, f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{1}=1 \end{aligned}$$

bulunur. Fonksiyonun 0 ve 1 noktalarında sürekli olması için sırasıyla $f(0^-)=f(0)=f(0^+)$ veya $b=-1$ ve $f(1^-)=f(1)=f(1^+)$ veya $a+b=1$ olmalıdır. Buna göre, $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ olması için $a=2$ ve $b=-1$ olmalıdır.

(b) $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $f(x)=(x^2)^{a+b}.(\frac{\sin x^2}{x^2})^b$ ve $\forall b\in\mathbb{R}$ için $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x^2}{x^2})^b=1$ olduğu açıktır. O halde, fonksiyonun 0 noktasında sürekli olması için

$$0=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2)^{a+b}$$

olmalıdır. Bu da yalnızca $a+b>0$ durumunda mümkündür. Dolayısıyla, $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ olması için $a+b>0$ olmalıdır. $\diamond$

(9) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f\circ g)$ ve $(g\circ f)$ bileşke fonksiyonlarının süreklilik durumunu inceleyiniz.

(a) $f(x)=\text{sgn}x, g(x)=1+x^2$; (b) $f(x)=\text{sgn}x, g(x)=x-x^3$;

(c) $f(x)=1-\mid x-1\mid, \quad g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q} \text{ ise},\\ 2-x, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad \text{ise}.\end{cases}$

Çözüm: (a) $f(g(x)) = \text{sgn}(1+x^2) = 1$ ve $g(f(x)) = 1 + (\text{sgn}x)^2 = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 1, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ bulunur. Buna göre, $(f \circ g) \in C(\mathbb{R})$ ve $(g \circ f) \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır. (Bkz. şekil 3.4).

(b) $f(g(x)) = \text{sgn}(x - x^2) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ ve } x < -1 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \ \text{ ve } x = \pm 1 \text{ ise}, \\ -1, & x > 1 \text{ ve } -1 < x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ ve $g(f(x)) = \text{sgn}(1 - \text{sgn}^2 x) = 0$ bulunur. Buna göre, $(f \circ g) \in C(\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\})$ ve $(g \circ f) \in C(\mathbb{R})$ (Bkz. şekil 3.5).

(c) $x \in \mathbb{Q}$ için $f(g(x)) = 1 - |x-1|$ ve $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ için $f(g(x)) = 1 - |1-x|$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(g(x)) = 1 - |x-1|$ dir. Benzer şekilde

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1 - |x-1|, & x \in \mathbb{Q} \text{ ise}, \\ 1 + |x-1|, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu bulunur. Demek ki, $f \circ g \in C(\mathbb{R})$ ve $g \circ f$ fonksiyonun $x = 1$ noktasında sürekli olup herhangi bir $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ noktasında süreksizdir.$\diamond$

(10) Reel katsayılı ve tek dereceli polinom denklemin, yani

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

denklemin en az bir reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a_0 > 0$ olsun. $q_{2n+1}(\frac{1}{x}) = \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_{2n}}{x^{2n}} + \dfrac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} \\ &= x^{2n+1}(a_0 + q_{2n+1}(\tfrac{1}{x})) \end{aligned}$$

ve $\lim\limits_{x\to+\infty} q_{2n+1}(\frac{1}{x}) = 0$ olduğuna göre, $\exists\Delta > 0$ öyle ki, $\forall x > \Delta$ için $|q_{2n+1}(\frac{1}{x})| < \dfrac{a_0}{2}$ olur. Buna göre, $\forall x > \Delta$ için

$$P_{2n+1}(x) = x^{2n+1}(a_0 + q_{2n+1}(\tfrac{1}{x})) > \frac{a_0}{2}x^{2n+1}$$

olduğu elde edilir. Demek ki, $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty$ olduğu bulunur.

$$\lim_{x\to+\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty \Rightarrow \forall\epsilon_1 > 0,\ \exists\delta_1 > 0 \text{ öyle ki, } \forall x \geq \delta_1$$

için $P_{2n+1}(x) > \epsilon_1$ olur.

Benzer şekilde, $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$ olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\lim_{x\to-\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty \Rightarrow \forall\epsilon_2 > 0,\ \exists\delta_2 > 0 \text{ öyle ki, } \forall x \leq -\delta_2$$

için $P_{2n+1}(x) < -\epsilon_2$ olur.

Dolayısıyla, $P_{2n+1}(\delta_1) > 0$ ve $P_{2n+1}(-\delta_2) < 0$ olacak şekilde bir $[a,b] = [-\delta_2, \delta_1] \subset \mathbb{R}$ aralığının varlığı anlaşılır. $P_{2n+1}(x) \in C([a,b])$ olduğuna göre, Bolzano-Cauchy Teoremi gereğince $P_{2n+1}(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. $a_0 < 0$ durumu benzer şekilde incelenebilir. $\diamond$

(11) $f([0,1]) \subset [0,1]$ koşulunu sağlayan her $f \in C([0,1])$ fonksiyonunun $[0,1]$ de bir sabit noktaya ($f(x_0) = x_0$ olacak şekilde $x_0 \in [0,1]$ noktasına f nin bir sabit noktası denir) sahip olacağını gösteriniz.

Çözüm: $[0,1]$ üzerinde sürekli $\varphi(x) = x - f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $\varphi(0) = -f(0) \leq 0$ ve $\varphi(1) = 1 - f(1) \geq 0$ olduğu açıktır. $f(0) = 0$ veya $f(1) = 1$ ise 0 veya 1 noktası f nin sabit noktası olur. $f(0) > 0$ ve $f(1) > 0$ olduğu durumlarda $\varphi(0) < 0$ ve $\varphi(1) > 0$ (veya $\varphi(0)\varphi(1) < 0$) olduğundan, Bolzano-Cauchy teoremi gereğince $\varphi(x_0) = 0$ veya $x_0 = f(x_0)$ olacak biçimde en az bir $x_0 \in (0,1)$ noktası vardır. Böylece, bu durumlarda da f nin sabit noktaya sahip olduğu elde edilir. $\diamond$

(12) $f \in \mathcal{C}[a,b]$, $g \in \mathcal{C}[a,b]$ ve $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$ ise, $f(x_0) = g(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in (a,b)$ noktasının mevcut olacağını gösteriniz.

Çözüm: $F(x) = g(x) - f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.$F \in \mathcal{C}[a,b]$, $F(a) = g(a) - f(a) < 0$ ve $F(b) = g(b) - f(b) > 0$ olduğu açıktır. Buna göre, Bolzano-Cauchy teoremi gereğince $F(x_0) = 0$, yani $f(x_0) = g(x_0)$ olacak biçimde bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır. $\diamond$

(13) $f((0,1)) \subset (0,1)$ koşulunu sağlayan ve $(0,1)$ de sabit noktaya sahip olmayan bir $f \in \mathcal{C}(0,1)$ fonksiyon örneği veriniz.

Çözüm: $f : (0,1) \to (0,1)$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun ($f(0,1) \subset (0,1)$ ve $x^2 \in \mathcal{C}(0,1)$ olduğu açıktır) $(0,1)$ de sabit noktası yoktur. $\diamond$

(14) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ve x_1, x_2, x_3 bu aralığın herhangi üç noktası olsun. Bu durumda,

$$f(c) = \frac{1}{3}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktasının mevcut olacağını gösteriniz.

Çözüm: $x_1 < x_2 < x_3$ ve $m = \inf\{f(x) : x \in [x_1, x_3]\}$,
$M = \sup\{f(x) : x \in [x_1, x_3]\}$ olsun. $\min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\} = A$ ve $\max\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\} = B$ dersek

$$A \leq \frac{1}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] \leq B$$

ve $[A,B] \subset [m,M]$ olduğu açıktır. $f \in \mathcal{C}[x_1, x_3]$ olduğuna göre, Ara Değer teoremi gereğince

$$f(c) = \frac{1}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası mevcuttur. $\diamond$

(15) $X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise, $|\, f(x)\, |$ de X kümesi üzerinde de bu noktada sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $x_0 \in X$ noktasında süreklidir $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki $\forall x \in X$ için $\mid x - x_0 \mid< \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid< \varepsilon$ dır". Bu durumda, aynı x ler için

$$|| f(x) | - | f(x_0) || \leq | f(x) - f(x_0) |< \varepsilon$$

olduğundan dolayı $\mid f \mid$ fonksiyonu X kümesi üzerinde x_0 noktasında süreklidir. ⋄

Not: Problem (15) ten $X \subset \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(X) \Rightarrow\mid f \mid\in \mathcal{C}(X)$ sonucu elde edilir. •

(16) $[0,1]$ aralığında tanımlı öyle $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulunuz ki, f, $[0,1]$ aralığının her noktasında süreksiz fakat $\mid f(x) \mid$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli olsun.

Çözüm: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \text{ rasyonel ise,} \\ -1, & x \in [0,1] \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu $[0,1]$ de süreksiz (yani her $x \in [0,1]$ noktasında süreksiz) olup, $\mid f(x) \mid= 1$, $x \in [0,1]$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreklidir. ⋄

(17) $X \subset \mathbb{R}$ ve $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları X üzerinde sürekli olsun. Bu durumda, $F, G : X \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}, G(x) = \min\{\varphi(x), \psi(x)\}$$

fonksiyonlarının da X üzerinde sürekli olacağını gösteriniz.

Çözüm: Herhangi $x \in X$ için

$$F(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi(x) + | \varphi(x) - \psi(x) |),$$

$$G(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi(x) - | \varphi(x) - \psi(x) |)$$

olduğu açıktır. $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(X) \Rightarrow \varphi \pm \psi \in \mathcal{C}(X)$ ve $\mid \varphi(x) - \psi(x) \mid\in \mathcal{C}(X)$ (Bkz Problem 15) olduğuna göre $F, G \in \mathcal{C}(X)$ dir. ⋄

(18) $X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde sürekli olsun. Bu durumda, $a < b$ olacak şekilde her $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için $[f]_a^b : X \to \mathbb{R}$,

$$[f]_a^b(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq f(x) \leq b \text{ ise}, \\ a, & f(x) < a \text{ ise}, \\ b, & f(x) > b \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $[f]_a^b$ fonksiyonunun X üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$[f]_{-\infty}^b(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq b \quad \text{ise}, \\ b, & f(x) > b \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $[f]_{-\infty}^b$ fonksiyonu için $[f]_{-\infty}^b = \min\{f(x), b\}$ olduğuna göre bu fonksiyon Problem 17 den dolayı X üzerinde süreklidir.

$$[f]_a^b = \max\{a, [f]_{-\infty}^b(x)\}$$

olduğuna göre yine Problem 17 den dolayı $[f]_a^b$ fonksiyonu X üzerinde süreklidir. $\diamond$

(19) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşulun her $a \in \mathbb{R}_+$ için Problem 18 de tanımlanan $[f]_{-a}^a$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olmasıdır. İspatlayınız.

Çözüm: $(\Rightarrow:) f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ise Problem 18 den dolayı $[f]_{-a}^a \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ dir.
$(\Leftarrow:) f$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreksiz olsun. Eğer, f nin x_0 noktasında sıçraması sonlu , yani $\gamma = \Omega(f, x_0)$ ise $a >\mid f(x_0) \mid +\gamma$ olduğunda x_0 noktasının öyle bir $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğu vardır ki, $\forall x \in U(x_0)$ için $[f]_{-a}^a(x) = f(x)$ olur. Bu durumda, $[f]_{-a}^a$ fonksiyonu da x_0 noktasında süreksizdir.

Eğer, $\Omega(f, x_0) = +\infty$ ise $a >\mid f(x_0) \mid$ olduğunda x_0 noktasının her $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda $[f]_{-a}^a$ nın sıçraması

$$\begin{aligned} \omega([f]_{-a}^a, U(x_0)) &= \sup\{[f]_{-a}^a(x) : x \in U(x_0)\} \\ &\quad - \inf\{[f]_{-a}^a(x) : x \in U(x_0)\} \geq a - f(x_0) \end{aligned}$$

olur. Budurumda da $[f]_{-a}^{a}$ fonksiyonu x_0 noktasında süreksiz olmaktadır. Dolayısıyla, f herhangi bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında süreksiz ise yeteri kadar büyük a lar için $[f]_{-a}^{a}$ fonksiyonu da x_0 noktasında süreksiz olur. Bu çelişki varsayımın yalnış olduğunu gösterir. $\diamond$

(20) φ, $[a,b]$ üzerinde artan ve $A = \varphi(a), B = \varphi(b)$ olmak üzere f, $[A,B]$ üzerinde monoton (azalmayan veya artmayan) bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f \circ \varphi$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde monoton mudur?

Çözüm: Evet. Gerçekten $t_1, t_2 \in [a,b]\,, t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ dir. Buna göre f azalmayan ise $f(\varphi(t_1)) \leq f(\varphi(t_2))$ ve f artmayan ise $f(\varphi(t_1)) \geq f(\varphi(t_2))$ dir. Dolayısıyla, f azalmayan (artmayan) bir fonksiyon ise $f(\varphi(t))$ fonksiyonu azalmayandır (artmayandır). $\diamond$

(21) φ ve f Problem 20 deki fonksiyonlar ve φ fonksiyonu bir $t_0 \in (a,b)$ noktasında süreksiz olsun. Bu durumda, $f(\varphi(t))$ fonksiyonu t_0 noktasında süreksiz olmak zorunda mıdır?

Çözüm: Hayır.

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1) \text{ ise,} \\ 1+t, & t \in [1,2] \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\varphi : [0,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = 1$ noktasında süreksizdir (Çünkü $\varphi(1^-) = 1 \neq 2 = \varphi(1^+)$ dır) ve $\varphi(0) = 0\,, \varphi(2) = 3$ dür. $[0,3]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \text{ ise,} \\ 1, & x \in (1,2) \text{ ise,} \\ x-1, & x \in [2,3] \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $\forall t \in [0,2]$ için $f(\varphi(t)) = t$ ve dolayısıyla $f \circ \varphi$ fonksiyonu $t = 1$ noktasında süreklidir (Üstelik $f \circ \varphi \in \mathcal{C}[0,2]$ dir). $\diamond$

Not: f kesin monoton (azalan veya artan) ve φ, t_0 noktasında süreksiz ise $f(\varphi(t))$ fonksiyonu t_0 noktasında süreksizdir. $\bullet$

(22) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda,

$$m(x) = \inf\{f(t) : a \leq t \leq x\}, \quad M(x) = \sup\{f(t) : a \leq t \leq x\}$$

biçiminde tanımlanan $m, M : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde monoton ve süreklidirler. Gösteriniz.

Çözüm: $x = a$ durumunda $[a, x]$ aralığı bir elemana sahip $\{a\}$ kümesi olmak üzere $m(x)$ ve $M(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde tanımlıdır. $M(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde monoton artan ve sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi $x \in [a, b)$ için $0 < h \leq b - x$ olmak üzere $[a, x] \subset [a, x + h]$ olduğuna göre $\{f(t) : a \leq t \leq x\} \subset \{f(t) : a \leq t \leq x + h\}$ dır. $A \subset B$ olacak şekilde her $A, B \subset \mathbb{R}$ kümeleri için $\sup A \leq \sup B$ olacağından dolayı $M(x) \leq M(x + h)$ dır ve dolayısıyla $M(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde azalmayandır. Şimdi $M(x)$ in $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunu gösterelim.

Önce, $c < d$ olacak şekilde $c, d \in [a, b]$ noktaları için

$$\omega(f, [c, d]) = \sup\{f(x) : c \leq x \leq d\} - \inf\{f(x) : c \leq x \leq d\}$$

f nin $[c, d]$ aralığında salınımı olmak üzere

$$M(d) \leq M(c) + \omega(f, [c, d]) \tag{3.7}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$M(d) = \max\{M(c), \sup\{f(x) : c \leq x \leq d\}\}$$

olduğu açıktır. Eğer, $M(d) = M(c)$ ise $\omega(f, [c, d]) \geq 0$ olduğundan dolayı

$$M(d) = M(c) \leq M(c) + \omega(f, [c, d])$$

bulunur. Eğer, $M(d) = \sup\{f(x) : c \leq x \leq d\}$ ise

$$\begin{aligned} M(d) &= M(c) + \sup\{f(x) : c \leq x \leq d\} - M(c) \\ &\quad [M(c) \geq f(c) \geq \inf\{f(x) : c \leq x \leq d\}\text{dir}] \\ &\leq M(c) + [\sup\{f(x) : c \leq x \leq d\} - \inf\{f(x) : c \leq x \leq d\}] \\ &= M(c) + \omega(f, [c, d]) \end{aligned}$$

olduğu ve dolayısıyla, (3.7) eşitsizliğinin sağlandığı ispat edilmiş olur. (3.7) den özel olarak $a < x \leq b$ ve $0 < h \leq b - x$ olduğunda

$$M(x+h) \leq M(x) + \omega(f, [x, x+h])$$

olur. $M(x)$ azalmayan bir fonksiyon olduğuna göre, buradan aynı x ve h lar için

$$0 \leq M(x+h) - M(x) \leq \omega(f, [x, x+h]) \tag{3.8}$$

eşitsizliğinin sağlandığı anlaşılır. f fonksiyonu $x \in [a, b)$ noktasında sürekli olduğundan dolayı $\lim\limits_{h \to 0^+} \omega(f, [x, x+h]) = 0$. O zaman, (3.8) den

$$\lim_{h \to 0^+} [M(x+h) - M(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^+} M(x+h) = M(x)$$

dır ve dolayısıyla, M fonksiyonu $x \in [a, b)$ noktasında sağdan süreklidir. Şimdi M fonksiyonunun $x \in (a, b)$ noktasında soldan sürekli olduğunu gösterelim. $x \in (a, b]$ ve $0 < h \leq x - a$ olmak üzere (3.7) den dolayı $x - h$ ve x noktaları için

$$M(x) \leq M(x-h) + \omega(f, [x-h, x])$$

dır ve dolayısıyla, aynı x ve h lar için

$$0 \leq M(x) - M(x-h) \leq \omega(f, [x-h, x])$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\lim_{h \to 0^+} \omega(f, [x-h, x]) = 0$$

olacağından,

$$\lim_{h \to 0} [M(x) - M(x-h)] = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^+} M(x-h) = M(x)$$

bulunur. Bu da M fonksiyonunun $x \in (a, b]$ noktasında soldan sürekli olması demektir. Böylece, M fonksiyonu $x \in (a, b)$ noktasında hem sağdan hem de soldan, $x = a$ noktasında sağdan ve $x = b$ noktasında soldan sürekli olduğundan dolayı $[a, b]$ üzerinde süreklidir. $m(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde artmayan ve sürekli olduğu benzer şekilde gösterilebilir. $\diamond$

(23) Önerme 3.2.12 yi ispatlayınız.

Çözüm: İspatı monoton artan fonksiyon için yapalım. Monoton azalan fonksiyon için ispat (aşikar işaret değişiklikleri hariç) aynıdır.$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi E olsun. $\forall x \in E$ için $f(x^-) \neq f(x^+)$ olmak zorundadır. f monoton artan olduğuna göre $f(x^-) < f(x^+)$ dır. Bu durumda, $f(x^-) < r(x) < f(x^+)$ olacak şekilde bir $r(x) \in \mathbb{Q}$ sayısı vardır. Üstelik $x_1, x_2 \in E$ ve $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x_1^+) \leq f(x_2^-)$ dır. Böylece $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in E)$ durumunda

$$f(x_1^-) < r(x_1) < f(x_1^+) \leq f(x_2^-) < r(x_2) < f(x_2^+)$$

olacağından $r(x_1) < r(x_2)$ dir. Bu durumda, E nin her x elemanına bir $r(x) \in \mathbb{Q}$ sayısı karşılık getirilmiş olur. Böylece, E ve $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında öyle bir dönüşüm belirtilmiş olur ki ,E kümesinin farklı iki elemanının $\mathbb{Q}$ daki görüntüleri farklıdır. Buna göre, E kümesi $\mathbb{Q}$ kümesinin bir alt kümesi ile (veya $\mathbb{Q}$ nun kendisiyle) aynı kuvvetlidir. Dolayısıyla, E kümesi ya sonludur yada sayılabilirdir. $\diamond$

(24) Önerme 3.2.19 u ispatlayınız.

Çözüm: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall 0 < \delta < \delta_1$ için

$$\omega_f(\delta) = \sup\{| f(x) - f(y) |: x, y \in X \wedge | x - y |< \delta\} < \varepsilon$$

olur. Buna göre, $\forall x, y \in X$ için

$$| x - y |< \delta \Rightarrow | f(x) - f(y) |< \varepsilon$$

olduğu ve f nin Tanım 3.2.16 anlamında düzgün sürekli olduğu anlaşılır.

Şimdi f Tanım 3.2.16 anlamında düzgün sürekli olsun. O halde, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall x, y \in X$ için $| x - y |< \delta_0 \Rightarrow | f(x) - f(y) |< \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Buradan da

$$\omega_f(\delta_0) = \sup\{| f(x) - f(y) |: x, y \in X \wedge | x - y |< \delta_0\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

bulunur. Dolayısıyla, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall 0 < \delta < \delta_0$ için

$$0 < \omega_f(\delta) \leq \omega_f(\delta_0) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$$

olduğu ve f nin Tanım 3.2.18 anlamında sürekli olduğu anlaşılır. $\diamond$

(25) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$,$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, +\infty)$ üzerinde ve dolayısıyla her $a > 0$ için $[0, a]$ üzerinde sürekli olduğu açıktır. O halde, Cantor teoremine göre $\sqrt{x}$ fonksiyonu her $a > 0$ için $[0, a]$ üzerinde düzgün süreklidir.

Öncelikle $\sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösterelim. $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ için

$$\mid \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \mid = \frac{\mid x_1 - x_2 \mid}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2} \mid x_1 - x_2 \mid$$

olur. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta = 2\varepsilon$ seçimi yapıldığında $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ için

$$\mid x_1 - x_2 \mid < \delta \Rightarrow \mid \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \mid < \frac{1}{2}\delta = \varepsilon$$

bulunur. Bu da $\sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olması demektir. Şimdi $\sqrt{x}$ in $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sqrt{x}$ $[0, 2]$ üzerinde düzgün sürekli olduğuna göre,

$$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \text{öyleki} \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 2] \ \text{için}$$

$$\mid x_1 - x_2 \mid < \delta_1 \Rightarrow \mid \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \mid < \varepsilon \tag{3.9}$$

dir.$\sqrt{x}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan,

$$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \, \text{öyleki} \, \forall x_1, x_2 \in [1, +\infty) \, \text{için}$$

$$| x_1 - x_2 |< \delta_2 \Rightarrow | \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} |< \varepsilon \tag{3.10}$$

dir. $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ seçimi yapıldığında $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ için $| x_1 - x_2 |< \delta$ eşitsizliğinden birincisi ($\delta < 1$ olduğuna göre) x_1 ve x_2 noktalarının herikisi ya $[0, 2]$ ya da $[1, +\infty)$ aralığı içindedir,ikincisi bu durumlarda (3.9) ya da (3.10) dan dolayı $| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} |< \varepsilon$ olduğu elde edilir. Demek ki, $\sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir. $\diamond$

(26) Tanım 3.2.18 den faydalanarak aşağıdaki fonksiyonların $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklilik durumlarını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$; (b) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$; (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Çözüm: (a) $\delta > 0$, $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ve $| x_1 - x_2 |\leq \delta$ olsun.$x_1 > x_2$ yani $0 < h \leq \delta$ olmak üzere $x_1 = x_2 + h$ olduğunu kabul edelim. O halde, $\forall x_2 > 0$ için $\sqrt{x_2 + \delta} + \sqrt{x_2} > \delta$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} &= \sqrt{x_2 + h} - \sqrt{x_2} \leq \sqrt{x_2 + \delta} - \sqrt{x_2} \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{x_2 + \delta} + \sqrt{x_2}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Öte yandan, $x_1 = x_2 + \delta$ için

$$\lim_{x_2 \to 0^+} (\sqrt{x_2 + \delta} - \sqrt{x_2}) = \sqrt{\delta}$$

olduğuna göre, $\omega_f(\delta) \geq \sqrt{\delta}$ son iki eşitsizlikten $\omega_f(\delta) = \sqrt{\delta}$ olduğu anlaşılır.

$$\lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = \lim_{\delta \to 0^+} \sqrt{\delta} = 0$$

olduğuna göre Tanım 3.2.18 den dolayı $\sqrt{x}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir.

(b) $\delta > 0$, $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ve $| x_1 - x_2 |\leq \delta$ olsun. Her $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ için

$$| \cos \frac{1}{x_1} - \cos \frac{1}{x_2} |\leq 2$$

ve demek ki, $\omega_f(\delta) \leq 2$ dir. $x'_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x''_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 0$ olduğuna göre, $0 < x'_{n_0} < \frac{\delta}{2}$, $0 < x''_{n_0} < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde,

$$| x'_{n_0} - x''_{n_0} | < \delta \text{ve } | \cos\frac{1}{x'_{n_0}} - \cos\frac{1}{x''_{n_0}} | = 2$$

dir. Demek ki, $\forall \delta > 0$ için $\omega_f(\delta) = 2$ dir. Buradan,

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 2 \neq 0$$

olduğu ve dolayısıyla, $\cos\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli oladığı anlaşılır.

(c) $\delta > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 = x_1 + \delta$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}}$$

ve

$$\lim_{x_1\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x_1}} = +\infty\,, \lim_{x_1\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}} = \frac{1}{\delta}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x_1\to 0^+} (\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}}) = +\infty$$

olduğu elde edilir. Öyleyse,

$$\sup\{\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}} : x_1 \in (0, +\infty)\} = +\infty$$

dur. Üstelik

$$\omega_f(\delta) \geq \sup\{\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}} : x_1 \in (0, +\infty)\}$$

olduğuna göre buradan $\forall \delta > 0$ için $\omega_f(\delta) = +\infty$ bulunur. Buna göre, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli değildir. ⋄

(27) $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[x_0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve sonlu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ limiti mevcut olsun. f nin $[x_0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Rightarrow \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) >| x_0 |$$

öyleki $\forall x \in [x_0+\delta_1, +\infty)$ için $| f(x) - A |< \frac{\varepsilon}{4}$ tür.
f fonksiyonu $[x_0, x_0+\delta_1]$ üzerinde sürekli olduğundan Cantor teoremi gereğince bu aralık üzerinde düzgün süreklidir. Buna göre,
$\exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ öyleki, $\forall x_1, x_2 \in [x_0, x_0+\delta_1]$ için

$$| x_1 - x_2 |< \delta_2 \Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) |< \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $x_1, x_2 \in [x_0, +\infty)$ ve $| x_1 - x_2 |< \delta$ olsun.$x_1, x_2 \in [x_0, x_0+\delta]$ ise

$$| f(x_1) - f(x_2) |< \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$x_1, x_2 \in [x_0+\delta, +\infty)$ ise

$$| f(x_1) - f(x_2) |\leq \quad | f(x_1) - A) | + | A - f(x_2) |< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ve nihayet $x_1 \in [x_0, x_0+\delta_1]$ ve $x_2 \in [x_0+\delta_1, +\infty)$ ise

$$| f(x_1) - f(x_2) |\leq| f(x_1) - f(x_0+\delta_1) | + | f(x_0+\delta_1) - f(x_2) |< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ seçimi yapıldığında $\forall x_1, x_2 \in [x_0, +\infty)$ için

$$| x_1 - x_2 |< \delta_2 \Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) |< \varepsilon$$

ve demekki ,f fonksiyonu $[x_0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir. $\diamond$

(28) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde düzgün sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

$(a) f(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ X = (0, \pi);$ $\quad (b) f(x) = e^x \cos\dfrac{1}{x},\ X = (0, 1);$

$(c) f(x) = x \sin\dfrac{1}{x},\ X = (0, +\infty);$ $\quad (d) f(x) = x\sin x,\ X = [0, +\infty);$

$(e) f(x) = x^2 - 2x - 1,\ X = [-2, 5];$ $\quad (f) f(x) = \sqrt[n]{x},\ X = (0, +\infty);$

$(g) f(x) = \sqrt{x^2}\ln x,\ X = (0, 1).$

Çözüm: (a) $F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in (0,\pi) \text{ ise}, \\ 1, & x = 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = \pi \text{ ise} \end{cases}$
biçiminde tanımlanan $F : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,\pi]$ üzerinde sürekli olduğundan dolayı Cantor teoremi gereğince $[0,\pi]$ üzerinde hem de düzgün süreklidir. Buna göre, $(F \mid_{(0,\pi)})(x) = f(x)$ fonksiyonu $(0,\pi)$ üzerinde düzgün süreklidir.

(b) $\varepsilon = 2$ ve herhangi $\delta > 0$ sayısı verilmiş olsun. $(0,\pi)$ içinde terimleri $x'_n = \frac{1}{2n\pi}, x''_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (x'_n) ve (x''_n) dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} \mid x'_n - x''_n \mid = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)\pi} = 0$$

olduğuna göre $\exists n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\mid x'_n - x''_n \mid < \delta$ fakat

$$\mid f(x'_n) - f(x''_n) \mid = e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}} > 2 = \varepsilon$$

olur. Demek ki, fonksiyon $(0,1)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

(c) $F(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \in (0,+\infty) \text{ ise;} \\ 0, & x = 0 \text{ ise.} \end{cases}$
biçiminde tanımlanan $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde sürekli ve

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

dir. Problem (27) den dolayı F fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir. Buna göre, $(F \mid_{(0,+\infty)})(x) = f(x)$ fonksiyonu $(0,+\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir.

(d) $[0,+\infty)$ içinde terimleri $x'_n = n\pi, x''_n = n\pi + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan x'_n ve x''_n dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} \mid x'_n - x''_n \mid = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

dır.

$$\mid f(x'_n) - f(x''_n) \mid = (n\pi + \frac{1}{n}) \mid \sin(n\pi + \frac{1}{n}) \mid = (n\pi + \frac{1}{n}) \sin\frac{1}{n}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{n\to\infty} \mid f(x'_n) - f(x''_n) \mid = \lim_{n\to\infty} (\pi + \frac{1}{n^2}) \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi$$

bulunur. Dmek ki, $\varepsilon = \frac{\pi}{2} > 0$ sayısı için $\delta = \varepsilon$ seçimi yapıldığında $\exists x'_{n_0}, x''_{n_0} \in [0, +\infty)$ öyleki $\mid x'_{n_0} - x''_{n_0} \mid < \delta$ fakat

$$\mid f(x'_{n_0}) - f(x''_{n_0}) \mid > \frac{\pi}{2} = \varepsilon$$

dur. Dolayısıyla, fonksiyon $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.
(e) f fonksiyonu $[-2, 5]$ üzerinde sürekli olduğundan dolayı Cantor teoremi gereğince $[-2, 5]$ üzerinde düzgün süreklidir.
(f) Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$0 \leq x_1 < \varepsilon^n \,, 0 \leq x_2 < \varepsilon^n \tag{3.11}$$

olacak şekilde her $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ noktaları için

$$0 \leq \sqrt[n]{x_1} < \varepsilon \,, 0 \leq \sqrt[n]{x_2} < \varepsilon$$

olduğu açıktır. Burada $\delta = 2\varepsilon^n$ seçimi yapıldığında $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta \Rightarrow \mid \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_2} \mid < \varepsilon$ bulunur. $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ noktalarının en az biri için (3.11) bağıntısı sağlanmadığında

$$\sqrt[n]{{x_1}^{n-1}} + \sqrt[n]{{x_1}^{n-2} x_2} + \sqrt[n]{{x_1}^{n-3} {x_2}^2} + \cdots + \sqrt[n]{{x_2}^{n-1}} > \varepsilon^{n-1}$$

olur. Bu durumda, $\mid x_1 - x_2 \mid < \varepsilon^n = \delta$ iken

$$\begin{aligned} \mid \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_2} \mid &= \frac{\mid x_1 - x_2 \mid}{\sqrt[n]{{x_1}^{n-1}} + \sqrt[n]{{x_1}^{n-2} x_2} + + \cdots + \sqrt[n]{{x_2}^{n-1}}} \\ &< \frac{\mid x_1 - x_2 \mid}{\varepsilon^{n-1}} < \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla, fonksiyon $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir.

(g) $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2} \ln x, & x \in (0, 1) \text{ ise,} \\ 0, & x = 0, x = 1 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlanan $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli olduğundan dolayı Cantor teoremi gereğince $[0,1]$ üzerinde hem de düzgün süreklidir. Bu nedenle $(F \mid_{(0,1)})(x) = f(x)$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde düzgün süreklidir. $\diamond$

(29) Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının her komşuluğunda sınırsız ise bu fonksiyon X üzerinde düzgün sürekli değildir. Gösteriniz.

Çözüm: f fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının her komşuluğunda sınırsız olduğuna göre, $\forall \delta > 0$ için $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$ fakat $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid > 1$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in U_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap X$ noktaları mevcuttur. Bu da f nin X üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.

$f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasının her komşuluğunda sınırsız olduğundan dolayı bu fonksiyon $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cot x$ fonksiyonu $x_0 = 0$ ve $x_0 = \pi$ noktalarının her komşuluğunda sınırsız olduğundan dolayı bu fonksiyon $(0, \pi)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasının her komşuluğunda sınırsız olduğundan dolayı bu fonksiyon $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli değildir. $\diamond$

(30) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde süreklilik modülünü bulunuz.

(a) $f(x) = x^2$, $X = [0,1]$; (b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $X = (0,1)$;
(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = (0,1)$.

Çözüm: (a) $0 < \delta \leq 1, x_1, x_2 \in [0,1]$ ve $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$ olsun $x_1 > x_2$, yani $0 < h \leq \delta$ olmak üzere $x_1 = x_2 + h$ olduğunu kabul edelim. O halde, $\forall x_2 \in [0,1]$ için

$$x_1{}^2 - x_2{}^2 = (x_2 + h)^2 - x_2{}^2 = 2hx_2 + h^2 \leq 2\delta + \delta^2$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta) &= \sup\{\mid {x_1}^2 - {x_2}^2 \mid :,\ x_1, x_2 \in [0,1] \wedge \mid x_1 - x_2 \mid \leq \delta\} \\ &\leq 2\delta + \delta^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

olduğu elde edilir. Öte yandan ,$x_1 = x_2 + \delta$ için

$$\lim_{x_2 \to 1^-} [x_2 + \delta^2 - {x_2}^2] = (1+\delta)^2 - 1 = 2\delta + \delta^2$$

olduğuna göre

$$\omega_f(\delta) \geq 2\delta + \delta^2 \tag{3.13}$$

bulunur. (3.12) ve (3.13) ten dolayı $\omega_f(\delta) = 2\delta + \delta^2$ olduğu anlaşılır.
(b) $0 < \delta < 1, x_1, x_2 \in (0,1)$ ve $\mid x_1 - x_2 \mid \leq \delta$ olsun $\forall x_1, x_2 \in (0,1)$ için

$$\mid \sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2} \mid \leq \mid \sin\frac{1}{x_1} \mid + \mid \sin\frac{1}{x_2} \mid \leq 2$$

olduğuna göre $\omega_f(\delta) \leq 2$ olduğu elde edilir. $(0,1)$ içinde terimleri $x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}, x''_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}, n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (x'_n) ve (x''_n) dizileri için $\lim\limits_{n\to\infty} \mid x'_n - x''_n \mid = 0$ olduğuna göre $0 < x'_{n_0} < \delta$ ve $0 < x''_{n_0} < \delta$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde, $\mid x'_{n_0} - x''_{n_0} \mid < \delta$ fakat $\mid \sin\frac{1}{x'_{n_0}} - \sin\frac{1}{x''_{n_0}} \mid = 2$ dir. Buna göre, $\omega_f(\delta) = 2$ olduğu anlaşılır.
(c) $0 < \delta < 1, 0 < x_1 \leq \delta, x_2 = \delta$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in (0,1)$ için $\mid x_1 - x_2 \mid \leq \delta$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta) &= \sup\{\mid \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \mid :, x_1, x_2 \in (0,1) \wedge \mid x_1 - x_2 \mid \leq \delta\} \\ &\geq \sup\{\mid \frac{1}{x_1} - \frac{1}{\delta} \mid :, x_1 \in (0,\delta]\} = +\infty\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, $\omega_f(\delta) = +\infty$ dur. $\diamond$

3.4 Ek Problemler

(31) "$\varepsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde sürekli olduklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = x^2,\ X = \mathbb{R}$; (b) $f(x) = x^3 + 2\cos x,\ X = \mathbb{R}$;

(c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+2},\ X = \mathbb{R}$; (d) $f(x) = \sqrt{x}\sin 2x,\ X \in [0, +\infty)$;

(e) $f(x) = \sin(2x-5),\ X = \mathbb{R}$; (f) $f(x) = 2^x,\ X = \mathbb{R}$;

(g) $f(x) = \arcsin x,\ X \in (-1, 1)$; (g) $f(x) = \arctan x,\ X = \mathbb{R}$.

(32) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının süreklilik durumlarını inceleyiniz. Süreksiz oldukları durumlarda süreksizlik çeşidini belirtiniz.

$(a) f(x) = \mathrm{sgn}(x^3 - 4x)$; $(b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & x \leq 2 \text{ ise}, \\ x-1, & x > 2 \text{ ise}; \end{cases}$

$(c) f(x) = \dfrac{|\, x-1 \,|}{x^2 - x^3}$; $(d) f(x) = \dfrac{2\mathrm{sgn}(1-x)}{(\mathrm{sgn}(x+1))^2(x+1+(x-1)\mathrm{sgn} x)}$;

$(e) f(x) = \dfrac{1}{x - [\![x]\!]}$;

$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan^2 x - 2\tan x + 2}, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ise}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ise}; \end{cases}$

$(g) f(x) = \begin{cases} \tan\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise}; \end{cases}$ $(h) f(x) = \begin{cases} \ln \mathrm{arccot}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise}; \end{cases}$

$(i) f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$; $(j) f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x^2-1}, & x \neq \pm 1 \text{ ise}, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm 1 \text{ ise}; \end{cases}$

$(k) f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Cevap:(a) $S(f) = \mathbb{R} \backslash \{-2, 0, 2\}$, $-2, 0, 2$ noktaları birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;

(b) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}, -1$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(c) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $x = 1$noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır, $x = 0$noktası ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(d) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, -1 ve 0 noktaları ikinci çeşit, 1 noktası birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(e) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, x = n \in \mathbb{Z}$ noktaları ikinci çeşit, süreksizlik noktasıdır;
(f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır;
(g) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{(2n+1)\pi} : n \in \mathbb{Z}\}, x = \frac{2}{(2n+1)\pi}, n \in \mathbb{Z}$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(h) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x = 0$ noktası ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(i) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$, $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(j) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}, x = \pm 1$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(k) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(33) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonlar $\mathbb{R}$ nin hangi noktalarda süreksizdir? Süreksizlik çeşidini belirtiniz.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 27}{| x + 3 |}$; (b) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

(c) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$; (d) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$;

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}, & x > 0 \text{ ise}, \\ 1 + x, & x \leq 0 \text{ ise}; \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \text{ ise}, \\ x + 2, & x \geq 0 \text{ ise}; \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 1 \text{ ise}, \\ 1, & x = 1 \text{ ise}, \\ x - 1, & x > 1 \text{ ise}. \end{cases}$

Cevap:(a) $x = -3$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(b) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik ve $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ noktaları kaldırılabilir süreksizlik noktalarıdır;

(c) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ noktaları birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(d) $x = 0$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(e) $x = 0$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(f) $x = 0$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(g) $x = 1$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(34) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in [0,1], m, n \in \mathbb{Z} \text{ m ve n aralarında asal ise,} \\ 0, & x \in [0,1] \text{ irrasyonel ise,} \end{cases}$
şeklinde tanımlı $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun herbir $a \in [0,1]$ irrasyonel noktalarda sürekli olduğunu ve herbir $a \in [0,1]$ rasyonel noktalarda da süreksiz olduğunu gösteriniz.

(35) Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olması için a ne olmalıdır.

$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ a, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$ $(b) f(x) = \begin{cases} x \cot 2x, & x \neq 0, \\ & \mid x \mid < \frac{\pi}{2} \text{ ise,} \\ a, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$

$(c) f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 2 \text{ ise,} \\ 2ax, & x \geq 2 \text{ ise;} \end{cases}$ $(d) f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2), & x \neq 0 \text{ ise,} \\ a, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$

$(e) f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 2a, & x = 0 \text{ ise.} \end{cases}$

Cevap: (a) $a = \sqrt{2}$; (b) $a = \frac{1}{2}$; (c) $a = -\frac{7}{2}$; (d) $a = 0$; (e) $a = \frac{1}{2}$
.

(36) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $g \circ f$ ve $f \circ g$ bileşke fonksiyonlarının süreklilik durumlarını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \text{sgn}x$, $g(x) = 1 + x - [\![x]\!]$;

(b) $f(x) = \text{sgn}(x-1)$, $g(x) = \text{sgn}(x+1)$;

(c) $f(x) = \text{sgn}x$, $g(x) = x(4 - x^2)$.

(37) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise $f_-, f_+ : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \text{ ise}, \\ f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \text{ ise}, \\ 0, & f(x) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f_-(x)$ ve $f_+(x)$ fonksiyonlarının da $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

(38) $y = f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise $y =| f(x) |$ ve $y = f(| x |)$ fonksiyonları da süreklidir. Gösteriniz.

(39) Aşağıdaki denklemlerin karşılarında yazılı aralıklarda birer köke sahip olduklarını gösteriniz.

(a) $x^3 - 3x + 1 = 0,\ X = [-1, 0]$;

(b) $x^5 - 6x^2 + 3x - 7 = 0,\ X = [0, 2]$;

(c) $3\sin^3 x - 5\sin x + 1 = 0,\ X = [0, \frac{\pi}{2}]$;

(d) $8^x - 3.2^x - 16 = 0,\ X = [0, 2]$.

(40) Aşağıdaki denklemlerin tek bir köke sahip olduklarını gösteriniz.

$(a)\quad x.2^x = 1 \qquad (b)\quad x.e^x = 2 \qquad (c)\quad x = \varepsilon \sin x + a,\ (0 < \varepsilon < 1)$

(41) $0 < a < 1$, $b > 0$ olmak üzere $x = a\sin x + b$ denkleminin $[0, a+b]$ aralığında en az bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

(42) $10^{x-1} = x$ denkleminin $\mathbb{R}$ üzerinde iki köke sahip olduğunu gösteriniz.

(43) $2^x = 4x$ denkleminin en az iki reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

(44) $x\sin x - 0,5 = 0$ denkleminin sonsuz sayıda köke sahip olduğunu gösteriniz.

(45) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & -1 \leq x < 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise}, \\ x^2 - 1, & 0 < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında en küçük ve en büyük değerlerini alır mı?

(46)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & 0 \leq x < 2 \text{ ise}, \\ (x-4)^2 + 6, & 2 \leq x \leq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(a) = 1$ ve $f(b) = 7$ olacak şekilde a ve b sayıları var mıdır?

(47) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \sin x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de tanımlı sürekli ve artan $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tersinin varlığını gösteriniz.

(48) "$\varepsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün sürekli olduklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $X = [0.1, 1]$ (b) $f(x) = 2\cos x - \sin x, X = \mathbb{R}$

(49) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde düzgün sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $X = [1, +\infty)$;

(b) $f(x) = \cos x^2$, $X = (-2, 3)$;

(c) $f(x) = x\cos x$, $X = \mathbb{R}$;

(d) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, $X = (-\pi, 0) \bigcup (0, \pi)$;

(e) $f(x) = \cos x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $X = (0, 1)$;

(f) $f(x) = \tan x$, $X = (1, \frac{\pi}{2})$;

(g) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $X = [0.01, +\infty)$.

(50) Tanım 3.2.18 den faydalanarak aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

(a) $f(x) = 2x - 1$, $X = \mathbb{R}$; (b) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $X = (0, +\infty)$;

(c) $f(x) = \ln x$, $X = [1, +\infty)$ (d) $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$, $X = \mathbb{R}$.

Cevap: (a) düzgün süreklidir ; (b) düzgün sürekli değildir ; (c) düzgün süreklidir; (d) düzgün süreklidir.

(51) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde süreklilik modülünü bulunuz.

$(a)\quad f(x) = \sqrt{x},\ X = [0,1]\ ;\quad (b)\quad f(x) = \sin x,\ X = [0, \frac{\pi}{2}]\ ;$

$(c)\quad f(x) = \sin x,\ X = \mathbb{R}\ ;\quad (d)\quad f(x) = \sin \frac{1}{x},\ X = [-1,1]\backslash\{0\}\ .$

Cevap: (a) $\omega_f(\delta) = \begin{cases} \sqrt{\delta}, & 0 \le \delta \le 1 \text{ ise}, \\ 1, & 1 \le \delta \quad \text{ise}; \end{cases}$

(b) $\omega_f(\delta) = \begin{cases} \sin\delta, & 0 \le \delta \le \frac{\pi}{2} \text{ ise}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \le \delta \quad \text{ise}; \end{cases}$

(c) $\omega_f(\delta) = \begin{cases} 2\sin\frac{\delta}{2}, & 0 \le \delta \le \pi \text{ ise}, \\ 2, & \pi \le \delta \quad \text{ise}; \end{cases}$

(d) $\omega_f(\delta) = 2,\ \delta \in [0, +\infty)$.